15. Решите неравенство $\dfrac{5(x-6\sqrt{x}+8)}{x-16} \le \sqrt{x}-2$.

Решение.

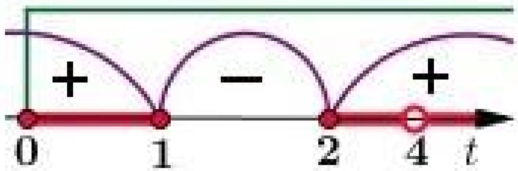
Пусть $t=\sqrt{x}$, $t \ge 0$, тогда:

$$\frac{5\cdot(t^2-6t+8)}{t^2-16} \le t-2 \;\Leftrightarrow\; \frac{5\cdot(t-2)(t-4)}{(t-4)(t+4)}-(t-2)\le 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t\ne 4, \\ (t-2)\cdot\left(\dfrac{5}{t+4}-1\right)\le 0; \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t\ne 4, \\ \dfrac{(t-2)(1-t)}{t+4}\le 0; \end{cases} \;\Leftrightarrow$$

$(t_{1;2}=3\pm 1=\{2;4\})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\ne 4, \\ \dfrac{(t-2)(t-1)}{t+4}\ge 0; \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t\ne 4, \\ (t-2)(t-1)\ge 0. \end{cases}$$

(т.к. $t\ge 0 \Rightarrow t+4>0$)



$$\left[\begin{array}{l} 0\le t\le 1, \\ 2\le t<4, \\ t>4. \end{array}\right.$$

Вернёмся к переменной x: $\left[\begin{array}{l} 0\le \sqrt{x}\le 1, \\ 2\le \sqrt{x}<4, \\ \sqrt{x}>4; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le x\le 1, \\ 4\le x<16, \\ x>16. \end{array}\right.$

Ответ: $[0;1]\cup[4;16)\cup(16;+\infty)$.