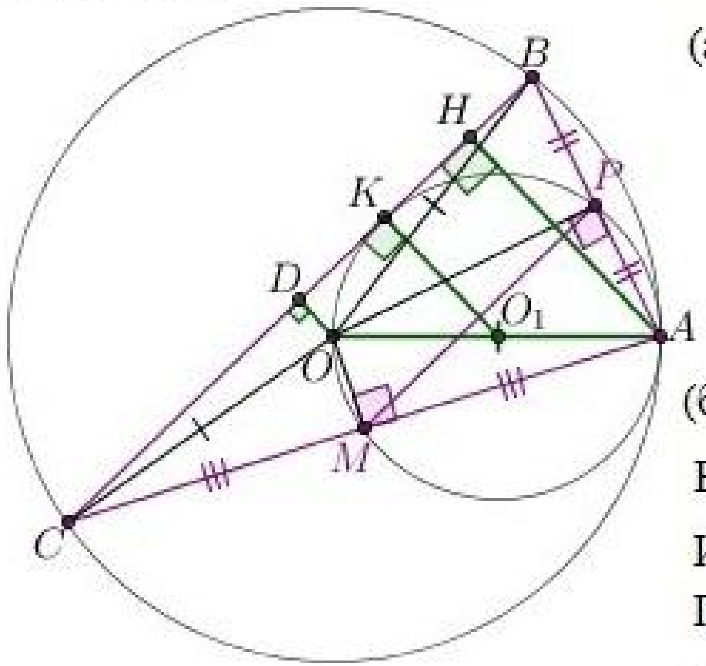
16. Две окружности касаются внутренним образом в точке A так, что меньшая окружность проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке K. Прямые AB и AC вторично пересекают меньшую окружность в точках P и M соответственно.

А) Докажите, что $PM \parallel BC$.

Б) Найдите площадь треугольника ABC, если $PM=12$, а радиус большей окружности равен 20.

Решение.



(а) $\angle APO = \angle AMO = 90°$ как вписанные $\angle$, опирающиеся на диаметр окр.
$OA=OB=OC$ как радиусы большой окружности.
В р/б ΔOAB OP – высота к основанию $\Rightarrow$ медиана, т.е. $AP=PB$,
В р/б ΔOAC OM – высота к основанию $\Rightarrow$ медиана, т.е. $AM=MC$,
Тогда PM – средняя линия ΔABC (по опр.) $\Rightarrow PM \parallel BC$, $PM=\frac{1}{2}BC$.

ч.т.д.

(б) $PM = 12 \Rightarrow BC = 2PM = 24$, $OC = OB = 20$, $O_1K = O_1O = \frac{1}{2}OA = 10$.

В р/б ΔOCB проведём медиану (= высоту) OD, $CD = \frac{1}{2}BC = 12$,

Из п/у ΔOCD по теореме Пифагора $OD = \sqrt{OC^2 - CD^2} = \sqrt{400-144} = 16$.

Проведём $AH \perp BC$, $OO_1 = O_1A$, $OD \parallel O_1K \parallel AH$ (соответст. углы равны)
$\Rightarrow DK=KH$ (по теореме Фалеса) $\Rightarrow O_1K$ – средн. линия трапеции $AODH$,

$$2O_1K = OD + AH \Rightarrow AH = 20 - 16 = 4, \quad S_{ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = \frac{4 \cdot 24}{2} = 48.$$

Ответ: 48.