18. Найдите все значения a, при каждом из которых множество решений неравенства $|x-a|+|x+3a|\ge x^2+a^2$ содержит ровно четыре целых значения x.

Решение.

Найдём нули подмодульных выражений: $x-a=0 \Leftrightarrow x=a, \quad x+3a=0 \Leftrightarrow x=-3a$.

Неравенство равносильно следующей совокупности систем:

$$(1)\ \begin{cases} x\ge a,\\ x\ge -3a,\\ x-a+x+3a\ge x^2+a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge a,\\ x\ge -3a,\\ 2x+2a\ge x^2+a^2. \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} x\ge a,\\ x\le -3a,\\ x-a-x-3a\ge x^2+a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge a,\\ x\le -3a,\\ -4a\ge x^2+a^2. \end{cases}$$

$$(2)\ \begin{cases} x\le a,\\ x\ge -3a,\\ -x+a+x+3a\ge x^2+a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le a,\\ x\ge -3a,\\ 4a\ge x^2+a^2. \end{cases} \qquad (4)\ \begin{cases} x\le a,\\ x\le -3a,\\ -x+a-x-3a\ge x^2+a^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le a,\\ x\le -3a,\\ -2x-2a\ge x^2+a^2. \end{cases}$$

Изобразим графически множество решений неравенства в плоскости Oax. Прямые $x=a$ и $x=-3a$ делят всю координатную плоскость на 4 области, пересекаются прямые в начале координат (0; 0).

Заметим, что если точка $(a;\, x)$ является решением неравенства, то и точка $(-a;\,-x)$ также $\in$ множеству решений неравенства, действительно: $\left|-x-(-a)\right|+\left|-x+3\cdot(-a)\right|\ge(-x)^2+(-a)^2 \;\Leftrightarrow\; \left|x+a\right|+\left|x+3a\right|\ge x^2+a^2$.

Тогда множество решений неравенства симметрично относительно начала координат и достаточно построить его часть «справа» от прямой $x=-3a$ (области (1) и (2)), а потом отобразить её относительно точки (0; 0).

(1) $2x+2a\ge x^2+a^2 \Leftrightarrow x^2-2x+a^2-2a\le 0 \Leftrightarrow x^2-2x+1+a^2-2a+1\le 2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(a-1)^2\le 2$

Неравенство задаёт часть круга с центром в точке (1; 1) и радиусом $r=\sqrt{2}$, ограниченную прямыми $x=a$, $x=-3a$. Найдём координаты точек $\cap$ окружности $(x-1)^2+(a-1)^2=2$ с прямыми $x=a$, $x=-3a$:

$$\begin{cases}(x-1)^2+(a-1)^2=2,\\ x=a;\end{cases} \Leftrightarrow 2\cdot(a-1)^2=2 \Leftrightarrow (a-1)^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a-1=1,\\ a-1=-1;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2,\\ a=0;\end{array}\right. \text{ А (2; 2) и (0; 0).}$$

$$\begin{cases}(x-1)^2+(a-1)^2=2,\\ x=-3a;\end{cases} \Leftrightarrow (-3a-1)^2+(a-1)^2=2 \;\Leftrightarrow\; 10a^2+4a=0 \;\Leftrightarrow\; a\cdot(5a+2)=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} a=0,\\ a=-0{,}4.\end{array}\right.$$

$x=-3\cdot(-0{,}4)=1{,}2$ B (–0,4; 1,2), (0; 0).

Окружность $(x-1)^2+(a-1)^2=2 \cap$ ось ОХ в точках: $(x-1)^2+1=2 \Leftrightarrow x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\\ x=2.\end{array}\right.$ C(0; 2) и (0; 0).

(2) $4a\ge x^2+a^2 \;\Leftrightarrow\; x^2+a^2-4a+4\le 4 \;\Leftrightarrow\; x^2+(a-2)^2\le 2^2$

Неравенство задаёт часть круга с центром в точке (2; 0) и радиусом $r=2$, ограниченную прямыми $x=a$, $x=-3a$. Найдём координаты точек $\cap$ окружности $x^2+(a-2)^2=4$ с прямыми $x=a$, $x=-3a$:

$$\begin{cases}x^2+(a-2)^2=4,\\ x=a;\end{cases} \Leftrightarrow a^2+(a-2)^2=4 \Leftrightarrow 2a^2-4a=0 \Leftrightarrow a\cdot(a-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2,\\ a=0;\end{array}\right. \text{ А (2; 2) и (0; 0).}$$

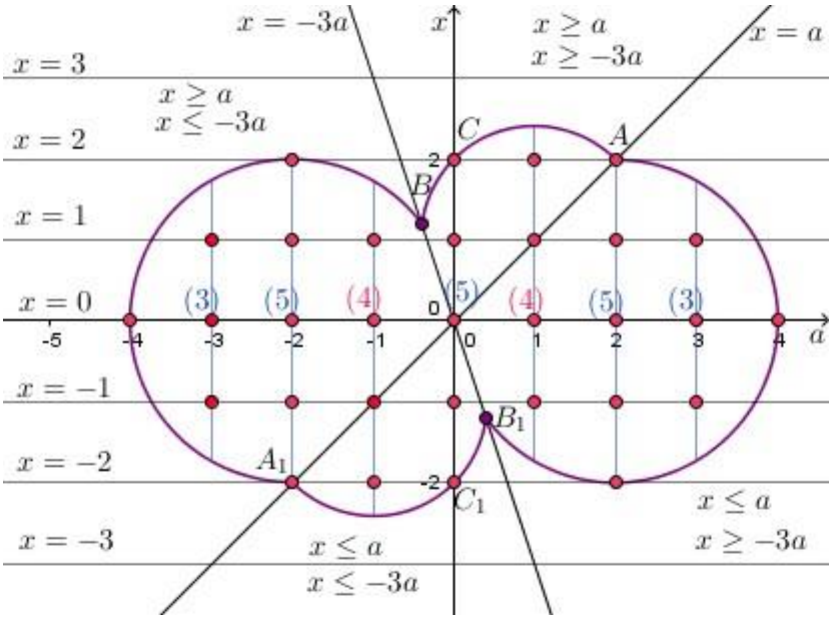
$$\begin{cases}x^2+(a-2)^2=4,\\ x=-3a;\end{cases} \Leftrightarrow (-3a)^2+(a-2)^2=4 \;\Leftrightarrow\; 10a^2-4a=0 \;\Leftrightarrow\; a\cdot(5a-2)=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} a=0,\\ a=0{,}4.\end{array}\right.$$

$x=-3\cdot 0{,}4=-1{,}2$ B_1 (0,4; –1,2), (0;0).

При центральной симметрии относительно точки (0; 0): $A(2;2)\to A_1(-2;-2)$, $B\leftrightarrow B_1$, $C(0;2)\to C_1(0;-2)$, окружности с центрами $(1;1)\to(-1;-1)$, $(0;2)\to(0;-2)$ переходят в окружности с такими же радиусами.

Решением исходного неравенства является множество точек плоскости Oax, заключённых внутри области, ограниченной замкнутой кривой $ACBA_1C_1B_1$, включая границу.

Решение неравенства для каждого конкретного значения параметра a_0 представляет собой отрезок прямой, параллельной оси ОХ, проведённой через точку с абсциссой a_0. По условию задачи нас устраивают только те значения параметра, соответствующий отрезок для которых содержит ровно 4 целочисленных значения x, т.е. прямые $x=c,\, c\in Z$ (параллельные оси Oa), пересекают отрезок в 4-х точках.



На рисунке через целые значения параметра $a = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$ проведены отрезки, параллельные оси ОХ (= решения неравенства для этого значения а), красным цветом выделены точки с целыми значениями x. Количество таких точек для каждого значения a указано в круглых скобках.

Легко увидеть, что ровно 4 целых значения x содержатся в решении неравенства при $a \in (-2; 0) \cup (0; 2)$.

Ответ: $a \in (-2; 0) \cup (0; 2)$.