

17. Алексей взял в банке кредит 10 млн. рублей под 10% годовых. По договору Алексей возвращал кредит ежегодными платежами. В конце каждого года к оставшейся сумме долга добавлялось 10% этой суммы и своим ежегодным платежом Алексей погашал эти добавленные проценты и уменьшал сумму долга. Ежегодные платежи подбирались так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый год (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась 15 млн. рублей. Определите, на сколько лет Алексей брал кредит в банке.

Решение.

Пусть n - количество лет; $n \cdot S$ – сумма, взятая в кредит, по условию задачи она равна 10000000 руб.

S_1 – вся выплаченная сумма ($S_1 = 15000000$ руб.)

p – процент ($p=10\%$), тогда $k = 1,1$ - коэффициент, на который каждый год умножается оставшаяся сумма долга.

По условию задачи долг погашается **равномерно**, т.е. на одну и ту же сумму каждый год.

Тогда каждый год долг уменьшается на S (рублей). Ежегодные выплаты занесём в таблицу:

n	Долг после начисления процентов	Оставшаяся сумма долга после выплаты	Выплата за текущий год
1	$nS \cdot k$	$(n-1)S$	$S \cdot (nk - (n-1))$
2	$(n-1)S \cdot k$	$(n-2)S$	$S \cdot ((n-1)k - (n-2))$
3	$(n-2)S \cdot k$	$(n-3)S$	$S \cdot ((n-2)k - (n-3))$
...
$n-1$	$2S \cdot k$	S	$S \cdot (2k - 1)$
n	Sk	0	Sk

Общая сумма выплат складывается из выплат за каждый год:

$$S_1 = S \cdot (nk - (n-1)) + S \cdot ((n-1)k - (n-2)) + S \cdot ((n-2)k - (n-3)) + \dots + S \cdot (2k - 1) + Sk =$$

вынесем общий множитель S за скобки и сгруппируем отдельно слагаемые с разными знаками

$$= S \cdot ((nk + (n-1)k + (n-2)k + \dots + 2k + k) - ((n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1)) =$$

вынесем общий множитель k

$$= S \cdot (k \cdot (n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1) - ((n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots + 1)) =$$

в первой скобке – сумма n первых натуральных чисел, применим формулу арифметической прогрессии:

$$a_1 = 1, a_n = n, S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1+n}{2} \cdot n; \text{ во второй скобке сумма } n-1 \text{ первых натуральных чисел,}$$

$$\text{аналогично: } a_1 = 1, a_{n-1} = n-1, S_{n-1} = \frac{a_1 + a_{n-1}}{2} \cdot (n-1) = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

$$= S \cdot \left(k \cdot \frac{1+n}{2} \cdot n - \frac{n \cdot (n-1)}{2} \right) = \frac{Sn}{2} \cdot (k + kn - n + 1) = \frac{Sn}{2} \cdot (k + 1 + n \cdot (k-1))$$

$$\text{Подставим значения известных из условия величин: } 5000000 \cdot (1,1 + 1 + n \cdot (1,1 - 1)) = 15000000$$

$$2,1 + 0,1n = 3 \Leftrightarrow 0,1n = 0,9 \Leftrightarrow n = 9.$$

Ответ: 9.