18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $2a^2 - x^2 - 3a + 8x = (3a-3)\sqrt{16-(x-4)^2}$ имеет ровно два различных действительных корня.

Решение.

Преобразуем подкоренное выражение: $16-(x-4)^2 = 16 - x^2 + 8x - 16 = -x^2 + 8x$

и перенесём всё в левую часть. Уравнение примет вид:

$2a^2 - 3a - x^2 + 8x - (3a-3)\cdot\sqrt{-x^2+8x} = 0$.

Пусть $t = \sqrt{-x^2+8x},\ t \ge 0$, тогда получим: $t^2 - (3a-3)\cdot t + 2a^2 - 3a = 0 \quad (*)$.

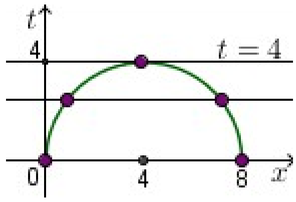
Исследуем $t(x) = \sqrt{-x^2+8x}$.

$D(t):\ -x(x-8) \ge 0 \ \Leftrightarrow\ x(x-8) \le 0 \ \Leftrightarrow\ 0 \le x \le 8$

$-x^2 + 8x = -(x^2 - 8x + 16 - 16) = -(x-4)^2 + 16$,

$t = \sqrt{-(x-4)^2 + 16}$, т.к. $t \ge 0$ возведём обе части в квадрат:

$t^2 = -(x-4)^2 + 16 \ \Leftrightarrow\ (x-4)^2 + t^2 = 4^2$ – уравнение п/окружности с центром в точке (4; 0) и радиусом $r = 4$.



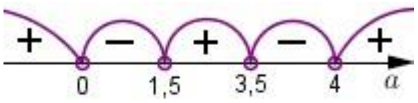
Прямые || оси ОХ при $0 \le t < 4$ пересекают эту окружность ровно в 2 различных точках; при $t = 4$ – в одной точке; при $t < 0$ или $t > 4$ не имеют с окружностью ни одной общей точки.
Тогда задачу можно переформулировать следующим образом: найти все значения a, при которых квадратное уравнение (*) имеет ровно один корень на промежутке $[0;\,4)$.

Это возможно в следующих случаях:

1) Уравнение имеет единственный корень и этот корень $\in [0;\,4)$. Наличие и количество корней квадратного уравнения определяются его дискриминантом:
$D = (3a-3)^2 - 4\cdot(2a^2 - 3a) = 9a^2 - 18a + 9 - 8a^2 + 12a = (a-3)^2 \ge 0$ при $\forall\, a$.

$D = 0$ при $a = 3$. Проверим корень: $t = \dfrac{3a-3}{2} = \dfrac{9-3}{2} = 3 \in [0;\,4) \Rightarrow a = 3$ удовлетворяет усл-ю задачи.

2) Уравнение имеет два корня ($a \ne 3$), но только один из них $\in (0;\,4)$. Это выполняется, если:
$f(0)\cdot f(4) < 0 \ \Leftrightarrow\ (2a^2 - 3a)\cdot(16 - 4\cdot(3a-3) + 2a^2 - 3a) < 0 \ \Leftrightarrow\ a\cdot(2a-3)\cdot(a-4)\cdot(a-3{,}5) < 0 \ \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < a < 1{,}5, \\ 3{,}5 < a < 4. \end{array}\right.$



3) Уравнение имеет два различных корня, один из них равен нулю, а второй $\notin [0;\,4)$.
$f(0) = 0 \ \Leftrightarrow\ 2a^2 - 3a = 0 \ \Leftrightarrow\ a\cdot(2a-3) = 0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 1{,}5. \end{array}\right.$
При $a = 0$ второй корень $t_2 = 3a - 3 = -3 \notin [0;\,4) \Rightarrow a = 0$ удовлетворяет условию задачи.
При $a = 1{,}5$ второй корень $t_2 = 3\cdot 1{,}5 - 3 = 1{,}5 \in [0;\,4) \Rightarrow a = 1{,}5$ не удовлетворяет условию задачи.

Объединяя полученные результаты, имеем: исходное уравнение имеет ровно два различных корня при $a \in [0;\,1{,}5) \cup \{3\} \cup (3{,}5;\,4)$.

Ответ: $a \in [0;\,1{,}5) \cup \{3\} \cup (3{,}5;\,4)$.